Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Естественные и математические науки»

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания
по дисциплине «Математика»
для практических занятий и самостоятельной студентов
направления

21.03.01 «Нефтегазовое дело»

очной и очно-заочной формы обучения

Энгельс 2024

ВВЕДЕНИЕ

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений является разделом курса «Математика», предусмотренным государственными образовательными стандартами подготовки специалистов и бакалавров. Важность этого раздела объясняется тем, что с помощью таких уравнений моделируются многие процессы в задачах естественных наук и технике. Для приложений наиболее интересны задачи с начальными или краевыми условиями. В таких задачах наряду с точными аналитическими решениями [1,2] используются также приближенные аналитические решения и численные решения. В настоящее время широко используются различные пакеты прикладных программ, таких, например, как Mathcad, Maple, MatLAB. Использование этих пакетов в учебных курсах обсуждается, например, в учебных пособиях [3,4]. Успешное использование пакетов прикладных программ возможно только грамотными пользователями, которые понимают постановку задачи и владеют различными методами решения. Настоящие методические указания предназначены для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов с целью выработки у студентов навыков решения типовых задач с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

1. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Дифференциальное уравнение – это соотношение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

Здесь: x - независимая переменная (аргумент), y – искомая функция этого аргумента, $y', \ldots, y^{(n)}$ – производные искомой функции. Левая часть равенства (1) является заданной функцией своих аргументов. В большинстве задач, которые возникают в естественных науках и технических приложениях, эта функция является непрерывной.

Порядок старшей производной, входящей в уравнение (1), называют *порядком дифференциального уравнения*. В естественных науках и технических приложениях чаще встречаются уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0$$

и уравнения второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Решить уравнение (1) – значит найти функцию, которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает последнее в тождество при всех допустимых значениях аргумента. Таких функций оказывается не одна, а целое семейство. При этом мы находим *общее решение* дифференциального уравнения. Это решение можно представить в виде

$$y = y(x, C_1, \ldots, C_n). \qquad (2)$$

Здесь $C_1, \ldots, C_n$ – *произвольные постоянные интегрирования*, число которых совпадает с порядком уравнения. Искомое семейство функций может быть также найдено в неявном виде:

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0. \qquad (3)$$

Равенство (3) определяет *общий интеграл дифференциального уравнения*.

Числовые значения констант интегрирования определяются, если наряду с уравнением (1) заданы *начальные условия*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots \quad , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (4)$$

Число начальных условий должно равняться порядку уравнения. В начальных условиях могут быть заданы значения искомой функции, а также её производных, порядок которых меньше порядка дифференциального уравнения. Уравнение (1) вместе с начальными условиями (4) представляют собой *задачу Коши (задачу с начальными условиями)*. При решении такой задачи сначала получается общее решение (2), затем на основании условий (4) составляется система уравнений относительно неизвестных $C_1, \ldots, C_n$. Решение этой системы $C_1^0, \ldots, C_n^0$ подставляется в общее решение (2). В результате получается *частное*

решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (4). Частное решение представляет собой определенную функцию аргумента x. Эта функция может быть задана неявно. В этом случае получается *частный интеграл дифференциального уравнения*.

Вопросы существования и единственности решения задачи с начальными условиями рассмотрены в учебной литературе [1,2]. В рамках данных методических указаний заметим только, что в большинстве задач, связанных с инженерными приложениями, существуют решения, причем единственные.

Рассмотрим далее решения некоторых типовых задач.

2. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОСТОЯННОЙ

Пусть требуется для дифференциального уравнения вида

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{5}$$

найти решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{6}$$

Уравнение (5) содержит искомую функцию y и производную y' в первой степени. Таким образом, уравнение (5) – линейное уравнение первого порядка. Наличие свободного слагаемого делает уравнение неоднородным.

Одним из методов отыскания общего решения уравнения (5) является *метод вариации произвольной постоянной*. Применение этого метода для решения задачи вида (5),(6) поясним следующим примером

Пример 1.

Требуется решить уравнение

$$y' + \frac{n}{x}y = \frac{2}{x^n} \tag{7}$$

при начальном условии

$$y(1) = 0. \tag{8}$$

1. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y' + \frac{n}{x}y = 0.$$

Это уравнение можно проинтегрировать, разделив переменные:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{n}{x}y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{n}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{n}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -n\ln|x| + \ln A.$$

В результате получим

$$y = \frac{A}{x^n}.$$

2. Используем полученное общее решение однородного уравнения. Будем искать общее решение данного неоднородного уравнения в виде

$$y = \frac{A(x)}{x^n}. \qquad (9)$$

Примечание: *Подстановка на место постоянной* A *неизвестной функции* $A(x)$ *называется вариацией произвольной постоянной*.

Подставляя выражение (9) в уравнение (7), получим:

$$\left(\frac{A(x)}{x^n}\right)' + \frac{n}{x}\frac{A(x)}{x^n} = \frac{2}{x^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{A'(x)x^n - A(x)nx^{n-1}}{x^{2n}} + n\frac{A(x)}{x^{n+1}} = \frac{2}{x^n} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A'(x)}{x^n} - n\frac{A(x)}{x^{n+1}} + n\frac{A(x)}{x^{n+1}} = \frac{2}{x^n} \quad \Rightarrow \quad A'(x) = 2.$$

Интегрируем полученное уравнение, разделив переменные:

$$\frac{dA(x)}{dx} = 2 \quad \Rightarrow \quad dA(x) = 2dx \quad \Rightarrow \quad \int dA(x) = \int 2dx \quad \Rightarrow \quad A(x) = 2x + C.$$

Подставляя последнее выражение в равенство (9), получим:

$$y = \frac{2x + C}{x^n} = \frac{C}{x^n} + \frac{2}{x^{n-1}}. \qquad (10)$$

В формуле (10) общее решение неоднородного уравнения представлено как сумма двух слагаемых: первое совпадает с общим решением однородного уравнения, второе является частным решением неоднородного уравнения.

3. Определим числовое значение постоянной C из начального условия (8):

$$\frac{2 \cdot 1 + C}{1^n} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -2.$$

Тогда искомое решение задачи с начальным условием:

$$y(x) = \frac{2(x-1)}{x^n}.$$

Для выработки навыков решения линейных уравнений первого порядка рекомендуется самостоятельно выполнить следующее задание.

Задание 1.

Найти решение задачи с начальным условием

1) $xy' - 2y = x^3 e^x, \qquad y(1) = e.$

2) $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4, \qquad y(0) = 0.$

3) $x^2 y' + 2xy = \cos x, \qquad y(\pi) = 1.$

4) $xy' + y = x + 1, \qquad y(2) = 0.$

5) $y' \cos x - y \sin x = 4x^3, \qquad y(0) = 1.$

6) $y' - y \cos x = 2x \exp(\sin x), \quad y(0) = \pi.$

7) $x^2 y' + 2xy = 1, \qquad y(1) = 1.$

8) $y' + 2xy = 2x \exp(-x^2), \qquad y(0) = 1.$

9) $2xy' - y = 2x^{3/2} \cos x, \qquad y(\pi) = 0.$

10) $y' + y \operatorname{tg} x = 2x \cos x, \qquad y(0) = 4.$

3. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + q = f(x), \quad p, q = const$$

может быть получено как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения

$$y'' + py' + q = 0$$

и частного решения данного неоднородного уравнения. Чтобы найти общее решение однородного уравнения, определим корни k_1, k_2 характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0$$

и применим одну из стандартных формул:

$$y_{одн} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \qquad \text{если} \qquad k_1 \neq k_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbf{R},$$

$$y_{одн} = e^{kx}(C_1 + C_2 x), \qquad \text{если} \qquad k_1 = k_2 = k, \quad k \in \mathbf{R},$$

$$y_{одн} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \qquad \text{если} \qquad k_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Частное решение рекомендуется построить методом неопределенных коэффициентов, ориентируясь по виду функции $f(x)$ в правой части уравнения. Наиболее распространенные случаи рассмотрены в учебном пособии [2]. Рассмотрим далее пример.

Пример 2.

Требуется найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5 = 2e^{3x} \qquad (11)$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -3/4. \qquad (12)$$

1. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-2)^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = 2 \pm i.$$

Тогда

$$y_{одн} = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$$

– общее решение однородного уравнения, соответствующего данному.

2. Исходя из вида правой части уравнения (11), будем искать частное решение этого уравнения в форме $Y = Ae^{3x}$. Тогда:

$$\left(Ae^{3x}\right)'' - 4\left(Ae^{3x}\right)' + 5Ae^{3x} = 2e^{3x} \Rightarrow 9Ae^{3x} - 12Ae^{3x} + 5Ae^{3x} = 2e^{3x} \Rightarrow 2A = 2.$$

Получили $A = 1$, следовательно, $Y = e^{3x}$.

3. Общее решение данного неоднородного уравнения представим в виде

$$y = y_{одн} + Y.$$

В результате получим общее решение:

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + e^{3x}. \qquad (13)$$

Дифференцируя выражение (13), находим:

$$y' = 2e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + e^{2x}\left(-C_1 \sin x + C_2 \cos x\right) + 3e^{3x}.$$

Учитываем начальные условия (12):

$$2 = e^0\left(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0\right) + e^0,$$

$$-\frac{3}{4} = 2e^0\left(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0\right) + e^0\left(-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0\right) + 3e^0.$$

Тогда

$$\begin{cases} C_1 + 1 = 2, \\ 2C_1 + C_2 + 3 = -3/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -23/4. \end{cases}$$

Получили частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x) = e^{2x}\left(\cos x - \frac{23}{4}\sin x\right) + e^{3x}.$$

Для выработки навыков решения линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами рекомендуется самостоятельно выполнить следующее задание.

Задание 2.

Найти решение задачи с начальными условиям

1) $y'' - 9y = e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
2) $y'' - 4y = x - 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
3) $y'' + 2y' + y = \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
4) $y'' + 3y' + 2y = 1 + x + x^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
5) $y'' + 2y' + 5y = 13e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.
6) $y'' - 2y' - 8y = 16x + 4$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.
7) $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
8) $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
9) $y'' + y = \cos 3x$, $y(\pi/2) = 4$, $y'(\pi/2) = 1$.
10) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.

4. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим далее задачу об общем решении системы дифференциальных уравнений. Ограничимся случаем, когда выполняются следующие условия:

1) система содержит уравнения первого порядка, разрешенные относительно производных;
2) независимая переменная не входит явно в уравнения;
3) уравнения линейные с постоянными коэффициентами, однородные.

Система принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n, \\ \qquad \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{1n}x_1 + \ldots a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Здесь через x_i, $i = 1, \ldots n$ обозначены искомые функции.

Возможна также матричная форма записи системы

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}. \tag{14}$$

Здесь

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Общее решение системы (14) допускает представление

$$\mathbf{X} = C_1\mathbf{X}_1 + \ldots C_n\mathbf{X}_n. \qquad (15)$$

В формуле (15) $C_1,\ldots,C_n$ – произвольные постоянные интегрирования, $\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n$ – линейно независимые частные решения системы. Частные решения можно найти в виде

$$\mathbf{X}_i = \exp(\lambda_i t)\begin{bmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} = \exp(\lambda_i t)\mathbf{P}_i, \quad i = 1,\ldots n.$$

Здесь $\lambda_1,\ldots\lambda_n$ – собственные значения матрицы $\mathbf{A}$, которые получаются как корни характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0. \qquad (16)$$

Вектор-столбец $\mathbf{P}_i$ является ненулевым решением неопределенной системы линейных алгебраических уравнений.

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E})\mathbf{P} = \mathbf{0}. \qquad (17)$$

Рассмотрим примеры при $n = 2$. Тогда характеристическое уравнение (16) – квадратное. В зависимости от вида корней λ_1, λ_2 следует различать три случая, каждый из которых будет далее разобран.

Пример 3.

Требуется найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение (16) принимает вид:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda_1 = 1 \quad \textit{или} \quad \lambda = \lambda_2 = 4.$$

Получили два различных действительных собственных значения.

При $\lambda_1 = 1$ система (17) для рассматриваемой задачи принимает вид:

$$\begin{cases} (2-1)p_1 + 2p_2 = 0 \\ p_1 + (3-1)p_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad p_1 + 2p_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = -2p_2.$$

Полагая $p_2 = 1$, получим $p_1 = -2$. Возникает частное решение системы

$$\mathbf{X}_1 = e^t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

При $\lambda_2 = 4$ система (17) для рассматриваемой задачи принимает вид:

$$\begin{cases} (2-4)p_1 + 2p_2 = 0 \\ p_1 + (3-4)p_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad p_1 - p_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = p_2.$$

Полагая $p_2 = 1$, получим $p_1 = 1$. Возникает частное решение системы

$$\mathbf{X}_2 = e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Используя выражение (15), построим общее решение сначала в матричном виде

$$\mathbf{X} = C_1 e^{t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

а затем – в скалярной форме

$$x_1 = -2C_1 e^{t} + C_2 e^{4t}, \quad x_2 = C_1 e^{t} + C_2 e^{4t}.$$

Пример 4.

Требуется найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2. \end{cases}$$

Составив и решив характеристическое уравнение, получим:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -(1-\lambda^2) + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Получили комплексно сопряженные собственные значения.

При $\lambda = i$ система (17) для рассматриваемой задачи принимает вид:

$$\begin{cases} (1-i)p_1 - 2p_2 = 0 \\ p_1 + (-1-i)p_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = (1+i)p_2.$$

Полагая $p_2 = 1$, получим $p_1 = (1+i)$. Возникает частное решение системы

$$\mathbf{X}_1 = \exp(it)\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = (\cos t + i\sin t)\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t + i\sin t + i\cos t - \sin t \\ \cos t + i\sin t \end{bmatrix}.$$

Выделяя действительную и мнимую части решения, получим

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}.$$

Действительная часть $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ и мнимая часть $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ сами являются линейно независимыми частными решениями данной системы дифференциальных уравнений. Используя эти частные решения, представим общее решение системы в виде

$$\mathbf{X} = C_1\mathbf{U} + C_2\mathbf{V}.$$

Тогда

$$\mathbf{X} = C_1 \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}.$$

Найденное решение можно также представить в скалярной форме

$$x_1 = C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\sin t + \cos t), \quad x_2 = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$

а затем сгруппировать в компонентах решения подобные слагаемые:

$$x_1 = (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t, \quad x_2 = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Пример 5.

Требуется найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 5x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Составив и решив характеристическое уравнение, получим

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - (5+3)\lambda + (5\cdot 3 - (-1)\cdot 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda - 4)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 4.$$

Получили два равных действительных собственных значения.

С учетом собственного значения $\lambda = 4$ представим искомое общее решение системы в виде

$$\mathbf{X} = e^{4t}\begin{bmatrix} a_1 t + a_0 \\ b_1 t + b_0 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Здесь a_1, a_0, b_1, b_0 - неопределенные константы. Подставим выражение (18) в матричную форму записи системы (14). Получим:

$$e^{4t}\begin{bmatrix} 4(a_1 t + a_0) + a_1 \\ 4(b_1 t + b_0) + b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot e^{4t}\begin{bmatrix} a_1 t + a_0 \\ b_1 t + b_0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4a_1 t + (4a_0 + a_1) \\ 4b_1 t + (4b_0 + b_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5a_1 - b_1)t + (5a_0 - b_0) \\ (a_1 + 3b_1)t + (a_0 + 3b_0) \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{cases} 4a_1 t + (4a_0 + a_1) = (5a_1 - b_1)t + (5a_0 - b_0), \\ 4b_1 t + (4b_0 + b_1) = (a_1 + 3b_1)t + (a_0 + 3b_0). \end{cases} \tag{19}$$

Система (19) позволяет установить между неопределенными константами a_1, a_0, b_1, b_0 такие зависимости, при которых выражение (18) будет представлять общее решение данной системы.

Потребуем, чтобы первое уравнение системы (19) удовлетворялось при всех значениях аргумента t. Для этого необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях аргумента в левой и правой частях. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4a_1 = 5a_1 - b_1, \\ 4a_0 + a_1 = 5a_0 - b_0. \end{cases} \tag{20}$$

Система (20) – неопределенная. Выразим с её помощью константы b_1, b_0 через a_1, a_0. Получим:

$$\begin{cases} b_1 = a_1, \\ b_0 = -a_1 + a_0. \end{cases} \tag{21}$$

Примечание: *Если рассмотреть второе уравнение системы (19), то мы получим для связей между константами ту же систему (21). Проверку этого утверждения рекомендуется выполнить самостоятельно.*

Полагаем далее, что $a_1 = C_1$, $a_0 = C_2$. Величины C_1, C_2 выступают в роли неопределенных констант интегрирования в общем решении системы.

Тогда выражение для общего решения (18) принимает вид

$$\mathbf{X} = e^{4t}\begin{bmatrix} C_1 t + C_2 \\ C_1 t + C_2 - C_1 \end{bmatrix}.$$

В скалярной форме общее решение данной системы представляется в виде

$$x_1 = e^{4t}(C_1 t + C_2), \quad x_2 = e^{4t}(C_1 t + C_2 - C_1).$$

Для выработки навыков решения систем линейных дифференциальных уравнений рекомендуется самостоятельно выполнить следующее задание.

Задание 3.

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

1) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + 3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 5x_2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -3x_1 + 6x_2. \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -5x_1 - 4x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 3x_2. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 6x_1 + 3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -8x_1 - 5x_2. \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 8x_2. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -5x_1 - 8x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -3x_1 - 3x_2. \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -4x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - x_2. \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 2x_2. \end{cases}$

5. УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

1. Общее решение уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$ можно получить путем повторного интегрирования правой части.

Пример 6.

Найти общее решение уравнения $y^{(3)} = \sin 2x$.

Получим:

$$y^{(3)} = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad y^{(2)} = \frac{-1}{2}\cos 2x + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}\cos 2x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

2. Общее решение уравнения вида $F(x, y^{(k)}, \ldots y^{(n)}) = 0$ можно получить путем введения новой неизвестной функции

$$y^{(k)} = z(x). \tag{22}$$

Для этой функции получается вспомогательное уравнение

$$F(x, z, \ldots z^{(n-k)}) = 0,$$

порядок которого меньше, чем порядок исходного уравнения. Получив общее решение вспомогательного уравнения, подставляем его в правую часть равенства (22). Затем восстанавливаем искомую функцию. Для этого интегрируем уравнение (22) так, как было показано ранее в данном разделе.

Пример 7.

Найти общее решение уравнения $xy'' + y' + x = 0$.

Получим:

$$xy'' + y' + x = 0 \quad (\textit{полагая } y' = z(x)) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z' + \frac{1}{x} z = -1 \quad (\textit{линейное уравнение первого порядка}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{C_1}{x} - \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{C_1}{x} - \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad y = C_1 \ln x - \frac{x^2}{4} + C_2.$$

3. Уравнение вида $F(y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$ не содержит явным образом независимую переменную *x*. Порядок такого уравнения понижается на единицу, если принять, что $y' = p(y)$. В качестве примера найдем общее решение уравнения:

Пример 8.

Найдем общее решение уравнения $1+(y')^2 = yy''$.

Получим:

$$1+(y')^2 = yy'' \quad \Rightarrow \quad 1+p^2 = y\frac{dp}{dy}p \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int\frac{2pdp}{1+p^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\left(1+p^2\right) = \ln y + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad 1+p^2 = (C_1 y)^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{(C_1 y)^2 - 1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{dy}{\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}} = \pm\int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C_1}\ln\left|C_1 y + \sqrt{(C_1 y)^2 - 1}\right| = \pm x + C_2.$$

Получили общий интеграл данного уравнения.

Для выработки навыков понижения порядка при решении дифференциальных уравнений рекомендуется самостоятельно выполнить следующее задание.

Задание 4.

Найти общее решение дифференциального уравнения.

1) $y''y^3 = 1.$
2) $y''' = (y'')^3.$
3) $(x-1)y'' - y' = x(x-1)^2.$
4) $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0.$
5) $yy'' + (y')^2 = 0.$
6) $xy'' = y'\ln\left(\frac{y'}{x}\right).$
7) $(1-x^2)y'' = xy'.$
8) $xy'' + y' = x^2.$
9) $xy''' + y'' = 1 + x.$
10) $y'' = -\frac{x}{y'}.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б.Горстко, Я.М.Ерусалимский. – СПб.: Издательство «Лань», 2006. – 960 с.
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2ч. Ч.2: Учебн. пособие для вузов / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова, С.П.Данко. – М.: ООО «Издательство Оникс», ООО « Издательство «Мир и Образование» », 2008. – 448 с.
3. Черняк А.А. Высшая математика на базе Mathcad. Общий курс / А.А.Черняк, Ж.А.Черняк, Ю.А.Долманова. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. 608 с.
4. Линьков В.М., Яременко Н.Н. Высшая математика в примерах и задачах. Компьютерный практикум. / Под ред. А.А.Емельянова. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 320 с.